

因式分解进阶二

一、换元法

换元法：“换元”就是“_____”，即用新的“元”去代替原式中的式子，使得原式变成含新“元”的式子，然后对含新“元”的式子按要求求出结果，在将其所代替的式子代回，求出原式的结果。利用换元法因式分解，就是将多项式中的某一部分用一个新字母（元）来代替，进行变量替换，将问题转化，从而起到化繁为简、化隐为显、化难为易的作用。

【教法备注】

换元法：“换元”就是“字母代式”，即用新的“元”去代替原式中的式子，使得原式变成含新“元”的式子，然后对含新“元”的式子按要求求出结果，在将其所代替的式子代回，求出原式的结果。

利用换元法因式分解，就是将多项式中的某一部分用一个新字母（元）来代替，进行变量替换，将问题转化，从而起到化繁为简、化隐为显、化难为易的作用。

1. 直接换元法

将式子中出现的 _____ 或 _____ 的式子用新的字母（元）代替，在因式分解。

【知识点拨】

将式子中出现的某个字母或某个代数式的式子用新的字母（元）代替，在因式分解。

|| 例题

1. 因式分解：

(1) $(a - 2b)^2 + 2(a - 2b) + 1$.

(2) $(x + y)^2 - 4(x + y) - 12$.

(3) $(x^2 + 4x + 8)^2 + 4(x^2 + 4x + 8) + 3$.

(4) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$.

【答案】 (1) $(a - 2b + 1)^2$.

(2) $(x + y + 2)(x + y - 6)$.

(3) $(x^2 + 4x + 9)(x^2 + 4x + 11)$.

(4) $(x - 1)(x + 2)(x^2 + x + 5)$.

【解析】 (1) 原式 = $(a - 2b + 1)^2$.

(2) $(x + y)^2 - 4(x + y) - 12 = (x + y + 2)(x + y - 6)$.

(3) 原式 = $(x^2 + 4x + 9)(x^2 + 4x + 11)$.

(4) 令 $t = x^2 + x + 1$, 则 :

$$\text{原式} = t(t + 1) - 12 = t^2 + t - 12 = (t - 3)(t + 4)$$

$$\therefore \text{原式} = (x^2 + x - 2)(x^2 + x + 5)$$

$$= (x - 1)(x + 2)(x^2 + x + 5) .$$

【标注】【知识点】换元法

练习

2. 分解因式 : $(x + y)^2 + 6x + 6y + 9$.

【答案】 $(x + y + 3)^2$.

【解析】 原式 = $(x + y)^2 + 6(x + y) + 9$,

$$\text{令 } x + y = a ,$$

$$\text{原式} = a^2 + 6a + 9$$

$$= (a + 3)^2$$

$$= (x + y + 3)^2 .$$

【标注】【知识点】换元法

3. 分解因式 :

$$(1) (x^2 + 7x + 8)^2 + 3(x^2 + 7x + 8) + 2.$$

$$(2) (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12.$$

【答案】 (1) $(x+2)(x+5)(x^2+7x+9)$.

(2) $(x+2)(x-1)(x^2+x+5)$.

【解析】 (1) 换元法分解因式, 令 $x^2 + 7x + 8 = A$,

$$\text{则原式} = A^2 + 3A + 2$$

$$= (A+1)(A+2)$$

$$= (x^2 + 7x + 9)(x^2 + 7x + 10)$$

$$= (x+2)(x+5)(x^2 + 7x + 9).$$

(2) 换元法分解因式, 令 $x^2 + x + 1 = A$,

$$\text{则原式} = A^2 + A - 12$$

$$= (A+4)(A-3)$$

$$= (x^2 + x + 5)(x^2 + x - 2)$$

$$= (x+2)(x-1)(x^2 + x + 5).$$

【标注】【方法】换元法

【能力】运算能力

【知识点】换元法

例题

4. 分解因式:

$$(1) (x^2 + 5x + 2)(x^2 + 5x + 3) - 12.$$

$$(2) (x^2 - x - 3)(x^2 - x - 5) - 3.$$

【答案】(1) $(x+2)(x+3)(x^2+5x-1)$.

(2) $(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$.

【解析】(1) 方法1: 将 x^2+5x 看作一个整体, 设 $x^2+5x=t$, 则

原式

$$= (t+2)(t+3) - 12 = t^2 + 5t - 6 = (t-1)(t+6) = (x+2)(x+3)(x^2+5x-1)$$

.

方法2: 将 x^2+5x+2 看作一个整体, 设 $x^2+5x+2=t$, 则

原式

$$= t(t+1) - 12 = t^2 + t - 12 = (t-3)(t+4) = (x+2)(x+3)(x^2+5x-1)$$

.

方法3: 将 x^2+5x+2 看作一个整体, 过程略. 如果学生的能力到一定的程度, 甚至连换元都不用, 直接把 x^2+5x 看作一个整体, 将原式展开, 分组分解即可, 则

$$\text{原式} = (x^2+5x)^2 + 5(x^2+5x) - 6$$

$$= (x^2+5x-1)(x^2+5x+6)$$

$$= (x+2)(x+3)(x^2+5x-1).$$

(2) 解法一: 令 $x^2-x-4=y$, 则

$$\text{原式} = (y-1)(y+1) - 3$$

$$= (y-2)(y+2)$$

$$= (x^2-x-6)(x^2-x-2)$$

$$= (x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$$

解法二: 令 $x^2-x-3=y$, 则

$$\text{原式} = y(y-2) - 3$$

$$= y^2 - 2y - 3$$

$$= (y+1)(y-3)$$

$$= (x^2-x-3+1)(x^2-x-3-3)$$

$$= (x^2-x-2)(x^2-x-6)$$

$$= (x+1)(x-2)(x+2)(x-3).$$

【标注】【知识点】换元法

练习

5. 分解因式： $(x^2 + 4)(x^2 + 6) - 48$ ，正确的是（ ）。

- A. $(x^2 + 4)(x^2 - 6)$ B. $(x^2 - 4)(x^2 + 6)$ C. $(x^2 + 12)(x^2 - 2)$ D. $(x^2 - 12)(x^2 + 2)$

【答案】C

【解析】令 $x^2 + 4 = a$ ，

$$\text{原式} = a(a + 2) - 48 = a^2 + 2a - 48,$$

$$= (a + 8)(a - 6),$$

$$= (x^2 + 12)(x^2 - 2),$$

故选C。

【标注】【知识点】二次项系数为 ± 1 的十字相乘；换元法

6. 分解因式： $(x^4 + x^2 - 4)(x^4 + x^2 + 3) + 10 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 2)(x + 1)(x - 1)$

【解析】令 $a = x^4 + x^2$ ，

$$\text{则原式} = (a - 4)(a + 3) + 10$$

$$= a^2 - a - 12 + 10$$

$$= a^2 - a - 2$$

$$= (a + 1)(a - 2),$$

$$\therefore \text{原式} = (x^4 + x^2 + 1)(x^4 + x^2 - 2)$$

$$= (x^4 + 2x^2 + 1 - x^2)(x^2 + 2)(x^2 - 1)$$

$$= [(x^2 + 1)^2 - x^2](x^2 + 2)(x + 1)(x - 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 2)(x + 1)(x - 1).$$

【标注】【知识点】二次项系数为 ± 1 的十字相乘；换元法

2. 先变形再换元

这类题目直接看不出题目中有哪些具有相同部分的多项式，因此不能直接利用换元法因式分解，需要先进行多项式之间的 ，两两一组先求出乘积，再观察式子的特点，最后利用换元法进行因式分解。需要注意的是式子中有四个括号连乘，需要先观察分析让哪两个式子在一组进行乘法计算，才能得到含有相同部分的多项式。

【教法备注】

这类题目直接看不出题目中有哪些具有相同部分的多项式，因此不能直接利用换元法因式分解，需要先进行多项式之间的乘法，两两一组先求出乘积，再观察式子的特点，最后利用换元法进行因式分解。需要注意的是式子中有四个括号连乘，需要先观察分析让哪两个式子在一组进行乘法计算，才能得到含有相同部分的多项式。

例题

7. 分解因式：

$$(1) (x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15.$$

$$(2) (a-1)(a-2)(a-3)(a-4)-24.$$

【答案】 (1) $(x+2)(x+6)(x^2+8x+10).$

(2) $a(a-5)(a^2-5a+10).$

【解析】 (1) 原式 $= [(x+1)(x+7)][(x+3)(x+5)] + 15$

$$= (x^2+8x+7)(x^2+8x+15) + 15,$$

$$\text{设 } x^2+8x+11=t,$$

$$\text{则原式} = (t-4)(t+4) + 15$$

$$= t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$$

$$= (x^2+8x+10)(x^2+8x+12)$$

$$= (x+2)(x+6)(x^2+8x+10).$$

(2) 原式 $= [(a-1)(a-4)][(a-2)(a-3)] - 24$

$$= (a^2-5a+4)(a^2-5a+6) - 24,$$

$$\text{设 } a^2-5a+5=t,$$

$$\text{则原式} = (t-1)(t+1) - 24$$

$$= t^2 - 25 = (t-5)(t+5)$$

$$= (a^2-5a)(a^2-5a+10)$$

$$= a(a-5)(a^2-5a+10).$$

【标注】【知识点】换元法

8. 分解因式： $(x-1)(2x-1)(3x-1)(6x-1)+x^2$.

【答案】 $(6x^2-6x+1)^2$.

【解析】原式= $(6x^2-7x+1)(6x^2-5x+1)+x^2$,

令 $6x^2-6x+1=a$,

原式= $(a+x)(a-x)+x^2$

$=a^2$

$= (6x^2-6x+1)^2$.

【标注】【知识点】换元法

|| 练习

9. 分解因式： $16(6x-1)(2x-1)(3x+1)(x-1)+25$.

【答案】 $(24x^2-16x-3)^2$.

【解析】方法一：设 $A=24x^2-16x+2$,

则原式= $(6x-1)(4x-2)(6x+2)(4x-4)+25$

$= (24x^2-16x+2)(24x^2-16x-8)+25$

$= A(A-10)+25$

$$= (A - 5)^2$$

$$= (24x^2 - 16x - 3)^2.$$

方法二：原式

$$= \frac{16}{36}(6x-1)(6x-3)(6x+2)(6x-6) + 25$$

$$= \frac{4}{9}(36x^2 - 24x + 3) \cdot (36x^2 - 24x - 12) + 25$$

$$= \frac{4}{9} \left[\left(36x^2 - 24x - \frac{9}{2} \right)^2 - \left(\frac{15}{2} \right)^2 \right] + 25$$

$$= (24x^2 - 16x - 3)^2$$

【标注】【知识点】换元法

|| 例题

【知识点拨】

这一类题目本身就是两个多项式连乘，但是没有相同的部分，不能换元，但是通过观察可以发现括号里的每个多项式都可以利用公式或十字相乘的方法分解成两个多项式相乘的形式，于是先对括号里的多项式进行因式分解就可以将原题转化成例题3的形式，再利用换元法解题。

10. 分解因式 $(x^2 + 3x + 2)(3 + 8x + 4x^2) - 90$.

【答案】 $(2x^2 + 5x + 12)(2x + 7)(x - 1)$.

【解析】 原式 $= (x + 1)(x + 2)(2x + 1)(2x + 3) - 90 = (2x^2 + 5x + 3)(2x^2 + 5x + 2) - 90$

作换元 $y = 2x^2 + 5x$:

$$\text{原式} = (y + 3)(y + 2) - 90 = y^2 + 5y - 84 = (y + 12)(y - 7) =$$

$$(2x^2 + 5x + 12)(2x + 7)(x - 1) .$$

【标注】【知识点】换元法

|| 练习

11. 分解因式： $(x^2 - 5x + 4)(x^2 - x - 2) - 72$.

【答案】 $(x^2 - 3x + 8)(x + 2)(x - 5)$

【解析】 原式

$$= (x-1)(x-4)(x-2)(x+1) - 72 = [(x-1)(x-2)][(x-4)(x+1)] - 72 = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 3x - 4) - 72$$

$$\text{设 } y = x^2 - 3x$$

$$\text{原式} = (y+2)(y-4) - 72 = y^2 - 2y - 80 = (y+8)(y-10)$$

$$\therefore \text{原式} = (x^2 - 3x + 8)(x^2 - 3x - 10) = (x^2 - 3x + 8)(x+2)(x-5).$$

3. 平均值换元法

平均值换元法就是将式子中需要换元的两项_____，得到这两项的_____，再设这个_____为新的元，代入原式进行因式分解．这类题目除了用_____换元法外，也可以利用直接换元法解决．做题时应灵活应用．

【教法备注】

平均值换元法就是将式子中需要换元的两项相加再除以2，得到这两项的平均值，再设这个平均值为新的元，代入原式进行因式分解．这类题目除了用平均值换元法外，也可以利用直接换元法解决．做题时应灵活应用．

|| 例题

12. 分解因式： $(x+5)^4 + (x+3)^2 - 82$.

【答案】 $2(x+6)(x+2)(x^2+8x+26)$

【解析】 解：设 $y = x + 4$ ，则 $x + 5 = y + 1$ ， $x + 3 = y - 1$ ，

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (y+1)^4 + (y-1)^4 - 82 = (y^2 + 2y + 1)^2 + (y^2 - 2y + 1)^2 - 82 \\ &= [(y^2 + 1) + 2y]^2 + [(y^2 + 1) - 2y]^2 - 82 = 2(y^2 + 1)^2 + 8y^2 - 82\end{aligned}$$

$$= 2y^4 + 12y^2 - 80 = 2(y^4 + 6y^2 - 40) = 2(y^2 - 4)(y^2 + 10) = 2(y - 2)(y + 2)(y^2 + 10)$$

$$\text{所以原式} = 2(x+6)(x+2)(x^2+8x+26)$$

练习

13. 分解因式： $(x^2 - x - 3)(x^2 - x - 5) - 3$.

【答案】 $(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$.

【解析】 解法一：令 $x^2 - x - 4 = y$ ，则

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (y-1)(y+1) - 3 \\ &= (y-2)(y+2) \\ &= (x^2 - x - 6)(x^2 - x - 2) \\ &= (x+1)(x-2)(x+2)(x-3)\end{aligned}$$

解法二：令 $x^2 - x - 3 = y$ ，则

$$\begin{aligned}\text{原式} &= y(y-2) - 3 \\ &= y^2 - 2y - 3 \\ &= (y+1)(y-3) \\ &= (x^2 - x - 3 + 1)(x^2 - x - 3 - 3) \\ &= (x^2 - x - 2)(x^2 - x - 6) \\ &= (x+1)(x-2)(x+2)(x-3) .\end{aligned}$$

【标注】 【知识点】换元法

二、拆项添项法

1. 因式分解： $(a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 =$ _____ .

2. 试回答：

①完成上面的因式分解你用到了什么方法/哪个公式？

②请把问题中的多项式化简，得_____，

如果要对这个式子做因式分解你可以用什么方法？请尝试完成因式分解：

_____ .

【教法备注】

1. 因式分解： $(a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 = (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$.

2. 试回答：

①完成上面的因式分解用到了平方差公式.

②请把问题中的多项式化简，得 $a^4 + a^2b^2 + b^4$ ，

如果要对这个式子做因式分解你可以用什么方法？请尝试完成因式分解：

添项配出完全平方 .

解：原式 $= a^4 + a^2b^2 + b^4 + a^2b^2 - a^2b^2$

$$= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2$$

$$= (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2$$

$$= (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$$

1. 添项

|| 例题

14. 分解因式： $a^4 + \frac{1}{4}$.

【答案】 $\left(a^2 + a + \frac{1}{2}\right)\left(a^2 - a + \frac{1}{2}\right)$.

【解析】原式 $= a^4 + \frac{1}{4} + a^2 - a^2$
 $= \left(a^2 + \frac{1}{2} \right)^2 - a^2$
 $= \left(a^2 + a + \frac{1}{2} \right) \left(a^2 - a + \frac{1}{2} \right).$

【标注】【知识点】拆添项法

15. 因式分解： $x^3 + 4x^2 - 5$.

【答案】 $(x - 1)(x^2 + 5x + 5)$.

【解析】原式 $= x^3 - 1 + 4x^2 - 4$
 $= (x - 1)(x^2 + x + 1) + 4(x + 1)(x - 1)$
 $= (x - 1)[(x^2 + x + 1) + 4x + 4]$
 $= (x - 1)(x^2 + 5x + 5).$

【标注】【知识点】重组重解；拆添项法

练习

16. 请看下面的问题：把 $x^4 + 4$ 分解因式

分析：这个二项式既无公因式可提，也不能直接利用公式，怎么办呢？

19世纪的法国数学家苏菲·热门抓住了该式只有两项，而且属于平方和 $(x^2)^2 + (2)^2$ 的形式，要使用

公式就必须添一项 $4x^2$ ，随即将此项 $4x^2$ 减去，即可得 $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2$

$$= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

人们为了纪念苏菲·热门给出这一解法，就把它叫做“热门定理”，请你依照苏菲·热门的做法，将下列各式因式分解。

(1) $x^4 + 4y^4$.

(2) $x^2 - 2ax - b^2 - 2ab$.

【答案】 (1) $(x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy)$.

(2) $(x + b)(x - 2a - b)$.

【解析】 (1) $x^4 + 4y^4$

$$= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2$$

$$= (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2$$

$$= (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy) .$$

(2) $x^2 - 2ax - b^2 - 2ab$

$$= x^2 - 2ax + a^2 - a^2 - b^2 - 2ab$$

$$= (x - a)^2 - (a + b)^2$$

$$= (x - a + a + b)(x - a - a - b)$$

$$= (x + b)(x - 2a - b) .$$

【标注】【知识点】拆添项法

2. 拆项

|| 例题

17. 分解因式： $4x^2 - 4x - y^2 + 4y - 3$.

【答案】 $(2x + y - 3)(2x - y + 1)$.

【解析】 原式 $= 4x^2 - 4x + 1 - (y^2 - 4y + 4)$,

$$= (2x - 1)^2 - (y - 2)^2 ,$$

$$= (2x + y - 3)(2x - y + 1) .$$

【标注】【知识点】分组分解—五项式

18. 分解因式： $3x^3 + 7x^2 - 4$.

【答案】 $(x + 1)(3x - 2)(x + 2)$.

【解析】 原式 $= 3x^3 + 3x^2 + 4x^2 - 4$,
 $= 3x^2(x + 1) + 4(x^2 - 1)$,
 $= 3x^2(x + 1) + 4(x + 1)(x - 1)$,
 $= (x + 1)[3x^2 + 4(x - 1)]$,
 $= (x + 1)(3x^2 + 4x - 4)$,
 $= (x + 1)(3x - 2)(x + 2)$.

【标注】【知识点】拆添项法

19. 分解因式： $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

【答案】 $(x + 1)(x + 3)(x - 2)$.

【解析】 原式 $= (x^3 + x^2) + (x^2 - 5x - 6)$
 $= x^2(x + 1) + (x - 6)(x + 1)$
 $= (x + 1)(x^2 + x - 6)$

$$= (x+1)(x+3)(x-2) .$$

【标注】【知识点】拆添项法

练习

20. 分解因式： $a^3 + 3a^2 + 3a + 2$.

【答案】 $(a+2)(a^2+a+1)$.

【解析】方法一：原式 $= (a^3 + 3a^2 + 3a + 1) + 1$
 $= (a+1)^3 + 1^3$
 $= (a+1+1) \left[(a+1)^2 - (a+1) + 1 \right]$
 $= (a+2)(a^2+a+1)$.

方法二：原式

$$\begin{aligned} &= (a^3 + 2a^2) + (a^2 + 2a) + (a+2) \\ &= a^2(a+2) + a(a+2) + (a+2) \\ &= (a+2)(a^2+a+1) . \end{aligned}$$

方法三：原式

$$\begin{aligned} &= (a^3 + a^2 + a) + (2a^2 + 2a + 2) \\ &= a(a^2 + a + 1) + 2(a^2 + a + 1) \\ &= (a+2)(a^2+a+1) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{方法四：原式} &= (a^3 - 1) + (3a^2 + 3a + 3) \\ &= (a-1)(a^2+a+1) + 3(a^2+a+1) \\ &= (a+2)(a^2+a+1) . \end{aligned}$$

【标注】【知识点】拆添项法

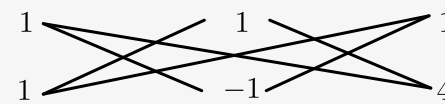
21. 分解因式： $x^2 - y^2 + 5x + 3y + 4$.

【答案】 $(x + y + 1)(x - y + 4)$.

【解析】 方法一：原式

$$\begin{aligned} &= (x + y)(x - y) + (4x + 4y) + (x - y) + 4 \\ &= (x + y)(x - y) + (x - y) + 4(x + y) + 4 \\ &= (x - y)(x + y + 1) + 4(x + y + 1) \\ &= (x + y + 1)(x - y + 4) . \end{aligned}$$

方法二：由算式


$$x^2 - y^2 + 5x + 3y + 4 = (x + y + 1)(x - y + 4) .$$

【标注】【知识点】双十字相乘法

22. 分解因式： $x^3 - 9x + 8$.

【答案】 $(x - 1)(x^2 + x - 8)$.

【解析】 $x^3 - 9x + 8 = x^3 - 1 - 9x + 9 = (x - 1)(x^2 + x + 1) - 9(x - 1) = (x - 1)(x^2 + x - 8)$

【标注】【知识点】拆添项法

三、立方和、立方差公式

1. 用立方和、立方差公式的因式分解

立方和、立方差

立方和公式：_____

立方差公式：_____

【教法备注】

立方和公式： $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)[(a + b)^2 - 3ab]$ ，

立方差公式： $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)[(a - b)^2 + 3ab]$ 。

|| 例题

23. 因式分解：

(1) $x^3 - x + y^3 - y$.

【答案】(1) $(x + y)(x^2 - xy + y^2 - 1)$.

【解析】(1) 略 .

【标注】【知识点】系数为整式的十字相乘

|| 练习

24. 分解因式：

(1) $x^8 - y^8$.

(2) $16x^5 - x$.

(3) $8a^3b^3c^3 - 1$.

(4) $64x^6y^3 + y^{15}$.

【答案】(1) $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$.

(2) $x(2x-1)(2x+1)(4x^2+1)$.

(3) $(2abc-1)(4a^2b^2c^2+2abc+1)$.

(4) $y^3(4x^2+y^4)(16x^4-4x^2y^4+y^8)$.

【解析】(1) 原式 $= (x^4-y^4)(x^4+y^4)$
 $= (x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$
 $= (x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$.

(2) 原式 $= x(16x^4-1)$
 $= x(4x^2-1)(4x^2+1)$
 $= x(2x-1)(2x+1)(4x^2+1)$.

(3) 原式 $= (2abc-1)(4a^2b^2c^2+2abc+1)$.

(4) 原式 $= y^3(64x^6+y^{12})$
 $= y^3(4x^2+y^4)(16x^4-4x^2y^4+y^8)$.

【标注】【知识点】因式分解的应用

2. 立方和、立方差公式相关的求值问题

|| 例题

25. 已知 $x+y=1$, $x^2+y^2=2$, 求 x^7+y^7 的值 .

【答案】 $\frac{71}{8}$.

【解析】 $xy = \frac{1}{2}[(x+y)^2 - (x^2 + y^2)]$,
 $= \frac{1}{2} \times (1^2 - 2)$
 $= -\frac{1}{2}$
 $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$
 $= 1 \times \left[2 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]$
 $= \frac{5}{2}$.
 $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2 = \frac{7}{2}$.
 $x^7 + y^7 = (x^3 + y^3)(x^4 + y^4) - x^3y^3(x+y)$
 $= \frac{5}{2} \times \frac{7}{2} + \frac{1}{8}$
 $= \frac{71}{8}$.
 故答案为 : $\frac{71}{8}$.

【标注】【知识点】高次方公式

练习

26. 如果 $m - \frac{1}{m} = -3$, 那么 $m^3 - \frac{1}{m^3} =$ _____ .

【答案】 -36

【解析】 $m^3 - \frac{1}{m^3} = \left(m - \frac{1}{m}\right)\left(m^2 + 1 + \frac{1}{m^2}\right)$
 $= -3\left(m^2 - 2 + \frac{1}{m^2} + 3\right)$
 $= -3\left[\left(m - \frac{1}{m}\right)^2 + 3\right]$
 $= -3 \times 12$
 $= -36$.

【标注】【知识点】和与差的立方公式

27. 已知 $a + b = 10$, $a^3 + b^3 = 100$, 则 ab 等于 _____ .

【答案】 30

【解析】 $\because a + b = 10$,

$$\therefore (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 100,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 100 - 2ab,$$

$$\therefore a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$= (a + b)[(a + b)^2 - 3ab]$$

$$= 100,$$

$$\text{故 } 10(10^2 - 3ab) = 100, 1000 - 30ab = 100,$$

$$\text{解得: } ab = 30.$$

【标注】【知识点】和与差的立方公式

 我学到了什么